(12) 10/10

(E,ρ), $\alpha \in E$, $A \subseteq E$

α εσ. σημείο του $A \overset{\text{op.}}{\Longleftrightarrow} (\exists r>0): B(\alpha,r) \subseteq A$

α σημείο επαφής του $A \overset{\text{op.}}{\Longleftrightarrow} (\forall r>0): B(\alpha,r) \cap A \neq \emptyset$

A°: συμβολίζω το σύνολο εσωτερ. σημείων του A.

$A^\circ \equiv$ πυρήνας του A ή εσωτερικό του A

$\bar{A}$: σύνολο των σημείων επαφής του A

$\bar{A} \equiv$ θήκη ή κάλυμμα του A

$$A^\circ = \{x \,/\, (\exists r>0)\, B(x,r) \subseteq A\}$$

$$\bar{A} = \{x \,/\, (\forall r>0): B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Πρόταση

(E,ρ) μ.χ., $\alpha \in E$, $A \subseteq E$

$\alpha \in A^\circ \Longleftrightarrow (\exists U(\alpha)): U(\alpha) \subseteq A$ (*)

$\alpha \in \bar{A} \Longleftrightarrow (\forall U(\alpha)): U(\alpha) \cap A \neq \emptyset$ (**)

Απόδειξη

i) ($\Longrightarrow$) $\alpha \in A^\circ \Longrightarrow (\exists r>0): B(\alpha,r) \subseteq A$. Αρκεί να ληφθεί $U(\alpha) = B(\alpha,r)$

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει το (*). Δηλ. $(\exists U(\alpha)): U(\alpha) \subseteq A$

$\xrightarrow[(\exists r>0):\, B(\alpha,r) \subseteq U(\alpha)]{U(\alpha) \text{ περιοχή του } A \Longrightarrow} (\exists r>0): B(\alpha,r) \subseteq A \Longrightarrow \alpha \in A^\circ$

ii) ($\Longrightarrow$) Έστω $\alpha \in \bar{A}$ κ $U(\alpha)$ τυχαία περιοχή του A.

Τότε $(\exists r>0): B(\alpha,r) \subseteq U(\alpha)$. Έτσι, επειδή $\alpha \in \bar{A}$

θα έχουμε: $B(\alpha,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow[B(\alpha,r)\cap A \subseteq U(\alpha) \cap A]{B(\alpha,r) \subseteq U(\alpha) \Rightarrow} U(\alpha) \cap A \neq \emptyset$

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει το (**) κ

$B(\alpha,r)$ τυχαία σφαιρ. περιοχή του α

Τότε (**) $\Longrightarrow B(\alpha,r) \cap A \neq \emptyset \overset{\text{op.}}{\Longrightarrow} \alpha \in \bar{A}$

Ορίζουμε επίσης:

$E^\circ = \bar{E} = E$

$\emptyset^\circ = \bar{\emptyset} = \emptyset$

Πρόταση

Αν A, B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μ.χ. E, τότε:

i) $A^\circ \subseteq A$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$ και

iii) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$

iv) $A^{\circ\circ} = A^\circ$ & v) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

α) $A \subseteq \overline{A}$

β) $A\subseteq B \Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$

γ) $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$

δ) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

ε) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Απόδειξη

i) Ισχύει εξ ορισμού

α) $a\in A \Rightarrow (\forall r>0)\ a\in B(a,r)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow a\in\overline{A}$

ii) $A\subseteq B\Rightarrow A^\circ\subseteq B^\circ$

$x\in A^\circ \Rightarrow (\exists r>0): B(x,r)\subseteq A \xRightarrow{A\subseteq B} (\exists r>0)\ B(x,r)\subseteq B \Rightarrow x\in B^\circ$

β) $A\subseteq B\Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$

$x\in\overline{A} \Rightarrow (\forall r>0): B(x,r)\cap A\neq\emptyset \xRightarrow{A\subseteq B\Rightarrow B(x,r)\cap A\subseteq B(x,r)\cap B}$

$\Rightarrow (\forall r>0): B(x,r)\cap B\neq\emptyset \Rightarrow x\in\overline{B}$

iii) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$

Θεωρώ $x\in(A^\circ)^c \Leftrightarrow x\notin A^\circ \Leftrightarrow \sim[(\exists r>0): B(x,r)\subseteq A] \Leftrightarrow$

$(\forall r>0): B(x,r)\nsubseteq A \Leftrightarrow (\forall r>0): B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset$

γ) Θεωρώ $x\in(\overline{A})^c \Leftrightarrow x\notin\overline{A} \Leftrightarrow \sim[(\forall r>0): B(x,r)\cap A\neq\emptyset] \Leftrightarrow$

$(\exists r>0): B(x,r)\cap A=\emptyset \Leftrightarrow (\exists r>0): B(x,r)\subseteq A^c \Leftrightarrow x\in(A^c)^\circ$

iv) Από την (i) ισχύει: $A^{\circ\circ}\subseteq A^\circ$. Αρκεί ν.δ.ο. $A^\circ\subseteq A^{\circ\circ}$

$x\in A^\circ \Rightarrow (\exists r>0): B(x,r)\subseteq A \xRightarrow{(**)} (\exists r>0): B(x,r)\subseteq A^\circ \Rightarrow x\in(A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$

Απόδειξη του (**)

Έστω $B(x,r)\subseteq A$ & έστω $y\in B(x,r) \xRightarrow[\text{σημείου της άρα \& του } y]{\text{Η } B(x,r) \text{ είναι περιοχή κάθε}} B(x,r)=U(y)$

$\xRightarrow{B(x,r)\subseteq A} U(y)\subseteq A \Rightarrow y\in A^\circ \Rightarrow B(x,r)\subseteq A^\circ$

δ) Ισχύει από (α): $\overline{A}\subseteq\overline{\overline{A}}$. Αρκεί ν.δ.ο. $\overline{\overline{A}}\subseteq\overline{A}$

$x\in\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow (\forall r>0): B(x,r)\cap\overline{A}\neq\emptyset$. Έστω $y\in B(x,r)\cap\overline{A}$. Τότε

η $B(x,r)$ είναι περιοχή του σημείου του y άρα $B(x,r)=U(y)$

Ακόμη $y\in\overline{A} \xRightarrow[\text{πρότ.}]{\text{προηγ.}} U(y)\cap A\neq\emptyset \Rightarrow (\forall r>0)\ B(x,r)\cap A\neq\emptyset \Rightarrow x\in\overline{A}$

v)
$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A \xRightarrow{(ii)} (A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ \\ A\cap B\subseteq B \xRightarrow{(ii)} (A\cap B)^\circ\subseteq B^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ\cap B^\circ$$

$x\in A^\circ\cap B^\circ \Rightarrow x\in A^\circ \wedge x\in B^\circ \Rightarrow [(\exists U(x)): U(x)\subseteq A]\wedge[(\exists V(x)): V(x)\subseteq B]$

$\xRightarrow{W(x)=U(x)\cap V(x)} (\exists W(x)): W(x)\subseteq A\wedge W(x)\subseteq B \Rightarrow$

$(\exists W(x)): W(x)\subseteq A\cap B \Rightarrow x\in(A\cap B)^\circ$

(14)

ε) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \cup A \\ B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \xrightarrow{(\beta)} \left.\begin{array}{l} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ θ.δ.ο. $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ (*)

Έστω ότι δεν ισχύει η (*) τότε $(\exists x): x \in \overline{A \cup B} \wedge x \notin \bar{A} \cup \bar{B}$

$x \notin \bar{A} \cup \bar{B} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \wedge x \notin \bar{B} \Longrightarrow [(\exists U(x)) : U(x) \cap A = \emptyset] \wedge [(\exists V(x)) : V(x) \cap B = \emptyset]$

$\xrightarrow{W(x) = U(x) \cap V(x)} W(x) \cap A = \emptyset \;\wedge\; W(x) \cap B = \emptyset \Longrightarrow$

$\Longrightarrow W(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$ ΑΤΟΠΟ (λόγω του: $x \in \overline{A \cup B}$)